

$$\frac{(2x)^{-b}}{x^{-b}} = 2^{-b} \quad (3)$$

Com relação à indústria aeronáutica da época, as conclusões de Wright poderiam resumir-se na seguinte regra: "Dobrando-se a produção de aeronaves, ocorrerá uma redução nas necessidades médias de mão-de-obra direta por unidade produzida, de 20% ou seja, o dispêndio de mão-de-obra por unidade correspondente à quantidade $2x$ será igual a 80% do dispêndio correspondente à quantidade x ."

Conquanto bastante empregado, mormente como instrumento de planejamento e controle na indústria aeronáutica e, mais tarde, em outras indústrias de mão-de-obra operatrizes como as de equipamentos eletrônicos, máquinas operatrizes e construção naval, o modelo de Wright ou curva de aprendizagem, tem sido criticado nos seguintes aspectos: a) falta de ajustamento da equação $\log \bar{y} = \log a - b \log x$, aos dados empíricos; b) o fato de \bar{y} crescer sem limite quando x tende a zero e, de tender a zero quando x cresce sem limite; c) o fato de que, para se aplicar o modelo, deva ser conhecida a mão-de-obra despendida com a primeira unidade, falhando portanto como instrumento de planejamento.

Contudo, é altamente discutível que as modificações propostas mais recentemente hajam contribuído para melhorar o modelo sem complicá-lo em demasia.

1.2 O modelo de Stanford

Após a II Guerra Mundial, economistas e econometristas interessaram-se em pesquisas sobre a curva de aprendizagem, devendo-se muito do ímpeto inicial à Força Aérea Americana. De 1945 a 1955 vieram à luz os trabalhos de Stanford Research Institute (4) e da Rand (5, 6, 7, 8, 9). O modelo de Stanford ou curva- b de Stanford pode ser expresso conforme segue:

onde: $y = a(x + b)^n$

y — número de homens-hora de mão-de-obra direta necessário para se produzir a x -ésima unidade;

b — é o equivalente, em unidades de produto, da experiência prévia naquele tipo de produção; b varia entre (1,10), sendo usual o valor $b = 4$;

n — possui significado semelhante ao expoente ($-b$) do modelo de Wright; situa-se entre (-1, 0), sendo típico o valor $n = -0,5$.

A introdução do fator b no modelo de Stanford possibilitou representar-se, com maior precisão, o progresso da produção (isto é, a diminuição do número de homens-hora por unidade com a produção acumulada) na fabricação de aeronaves como os Boeing B-17, B-45 e B-52. No caso dos modernos B-707, foi também empregada uma variante do modelo de Stanford, na previsão dos custos das primeiras unidades produzidas.

O efeito geométrico do fator b é o de arredondar a parte inicial da curva de Wright, destarte melhorando o ajustamento e, conseqüentemente, a previsão da mão-de-obra despendida na produção das primeiras unidades.

1.3 Os estudos de Werner-Hirsch

O pesquisador em tela possui papel destacado no desenvolvimento de tais modelos. Foi, provavelmente, o primeiro autor a empregar a denominação "função de progresso da produção" em substituição à "curva de aprendizagem". Hirsch (10) percebeu claramente que não se tratava apenas de aumento de produtividade devido ao aprendizado do operário, pela repetição pura e simples da tarefa. Tratava-se, isto sim, de verdadeiro "progresso" de uma organização encarada como um todo. O fenômeno descrito é muito mais complexo e constitui-se dos esforços coletivos de muitas pessoas, em cargos de linha e *staff*, todas empenhadas em tornar eficiente o desempenho da tarefa que lhes é comum: manter a continuidade da própria empresa.

Seus trabalhos avançam mais que os de Alchian (5,6) a quem procura completar e confirmar empiricamente determinadas hipóteses.

Hirsch é também um dos primeiros a reconhecer a utilidade da curva de progresso da produção fora do âmbito da indústria aeronáutica, havendo realizado estudos na indústria de máquinas operatrizes (11).

Além de confirmar a hipótese de linearidade, quando em coordenadas logarítmicas, entre a mão-de-obra por unidade e a produção acumulada, para todos os casos examinados nessa indústria, Hirsch demonstra que diferentes tipos de atividades possuem inclinações distintas. Por exemplo, as operações de *montagem* apresentam ritmo de progresso (fator b) mais elevado que as de *usinagem*.

1.4 Os estudos de Schulz-Conway

Em 1959, Andrew Schulz Jr. e R. W. Conway comunicaram suas conclusões sobre a pesquisa realizada sob sua direção, por membros de Departamento de Administração Industrial e de Engenharia da Universidade de Cornell, baseada em estudo detalhado sobre a produção de máquinas IBM de processamento de dados (12).

Os objetivos da pesquisa foram os seguintes: a) estimar, com maior precisão, os custos de implantação de produtos novos ou de modificações de produtos já existentes; b) estimar, com maior precisão, o espaço e a mão-de-obra necessários ao se fabricarem novos produtos ou ao se introduzirem modificações naqueles já existentes; c) melhor planejar e orçar os esforços indiretos (engenharia, administração, etc.) a serem requeridos por ocasião da implantação de novos produtos ou de modificações dos já existentes.

A pesquisa empreendida consistiu de três fases: a) a coleta de um número, estatisticamente suficiente, de séries de horas de *mão-de-obra direta* e da correspondente produção em *unidades físicas* e, simultaneamente, de todas as informações que pudessem ser obtidas, tais como: mudanças de projeto, dos métodos de produção e do ferramental; acontecimentos imprevistos, rotação de pessoal, etc. Essas informações tinham por finalidade justificar possíveis irregularidades nas curvas levantadas; b) a análise estatística dos dados obtidos de modo a associar causa e efeito e isolar as variáveis importantes; c) a generalização dos resultados obtidos.

Os seguintes fatores foram julgados responsáveis pelo decréscimo do número de homens-hora de mão-de-obra direta com o número de unidades produzidas consecutivamente:

1. *Grau de semelhança* do produto estudado com produtos anteriormente fabricados. Quanto *menor* esse grau de semelhança, *maior* será o ritmo de progresso experimentado, isto é, o número de homens-hora por unidade cairá mais rapidamente com o número de unidades produzidas.
2. *Organização departamental*. Um produto fabricado por departamento nele especializado apresentará *maior* ritmo de progresso em sua produção do que um produto fabricado em departamento que se dedique a vários outros produtos.
3. *O progresso em engenharia*. O reprojeto de produtos, a melhoria do ferramental e dos métodos de trabalho redundam em *maiores* ritmos de progresso.
4. *O progresso nos métodos administrativos*. A melhoria destes reflete-se também em *maiores* ritmos de progresso.
5. *O aprendizado do operário* devido à repetição da tarefa e à redução da produção danificada e defeituosa.

É relevante observar a evolução do conceito primitivo (modelo de Wright) quando o aprendizado do operário era tido como a causa maior do decréscimo de mão-de-obra por unidade observado. No estudo de Schulz — Conway e no de Hirsch, o aprendizado do operador passou a ser considerado apenas como *um* dos fatores influentes no aumento da produtividade.

Schulz e Conway empregaram a forma funcional:

$$y = ax^{-b} \quad (4)$$

onde, diversamente do modelo de Wright, y é o número de homens-hora despendido na produção da x -ésima unidade. Os parâmetros a e b têm o mesmo significado anteriormente exposto.

A análise dos dados históricos coletados mostrou que diferentes tipos de operações possuíam ritmos de progresso distintos, resultado já obtido por Hirsch. Em consequência, as operações foram subdivididas em sete categorias. De modo a obter o melhor ajustamento da linha reta aos $\log y$ versus $\log x$, utilizou-se o método dos mínimos quadrados, elaborando-se para tanto um programa em linguagem Fortran, que calculava para cada uma das sete categorias de operações: a) o parâmetro a ; b) o parâmetro b ; c) o valor de y_{1000} , o que permitia ajustar a reta de regressão entre a e y_{1000} ; d) a "inclinação" de Wright, em percentagem; e) os limites de confiança; f) os coeficientes de correlação. A partir desses estudos foram estabelecidas "inclinações" para cada categoria.

Visto como os melhores valores foram obtidos para um determinado tipo de máquina (a IBM 407), todas as demais máquinas, para as quais se devesse aplicar a função de progresso da produção, teriam que ser *comparadas* com a máquina base do estudo, no que tange ao grau de *complexidade* e, com quaisquer predecessoras, no que concerne ao grau de *semelhança*. Para isso, o es-

Tabela 1 — Inclinações percentuais para diversas operações de fabricação e montagem

Operação	Intervalo (%)	Melhor valor (%)
1. Montagem final		
a) Mecânica	80-85	83
b) Elétrica	85-95	90
c) Inspeção e Teste	65-80	70
2. Submontagem		
a) Em departamentos uniproduto		88
b) Em departamentos multiproduto		94
3. Fabricação de peças e componentes		
a) Padronizados		100
b) Novos		
LVI* ≤ 140		97
LVI > 140		89

* LVI (Labor Value Index) — Índice que reflete o conteúdo de mão-de-obra referente a determinado componente em um dado programa de produção.

tudo de Schulz-Conway apresenta uma série de tabelas por meio das quais se pode realizar as comparações mencionadas e, em função destas, selecionar a "inclinação" apropriada.

Em tais tabelas empíricas, observa-se que quanto *maior* o grau de complexidade da máquina considerada, relativamente à máquina-base, *menor* é a "inclinação" correspondente (e *maior*, portanto, o ritmo de progresso); observa-se também que quanto *maior* o grau de semelhança com quaisquer predecessoras, *maior* é a "inclinação" correspondente (e *menor*, portanto, o ritmo de progresso).

Outro resultado importante da pesquisa da Universidade de Cornell foi a determinação, para cada categoria, da unidade de produção em que a redução da mão-de-obra unitária seria desprezível. Agora já seria possível construir as curvas de progresso referentes a um programa de produção *sem que fosse necessário* conhecer a mão-de-obra correspondente à primeira unidade.

De acordo com os resultados da pesquisa, para as diversas categorias estabelecidas já se dispunha de um ponto (x_u, y_u) e, indiretamente do ângulo \emptyset . Seria portanto possível traçar a reta de progresso em papel log-log. Se não, vejamos:

x_u — unidade de produção a partir da qual o platô tem início; é um dos resultados da pesquisa de Cornell.

y_u — mão-de-obra corresponde a x_u ; é a mão-de-obra direta tal qual estimada pelo engenheiro de métodos, supondo completos o ferramental e o aprendizado do operário. De fato, nos estudos de tempos e movimentos, supõe-se um operário padrão, um ritmo normal, etc. Na determinação de y_u utiliza-se, em geral, tempos pre-determinados.

$$\emptyset = tg^{-1}(-b) = tg^{-1} \frac{\log \text{"inclinação"}}{\log 2};$$

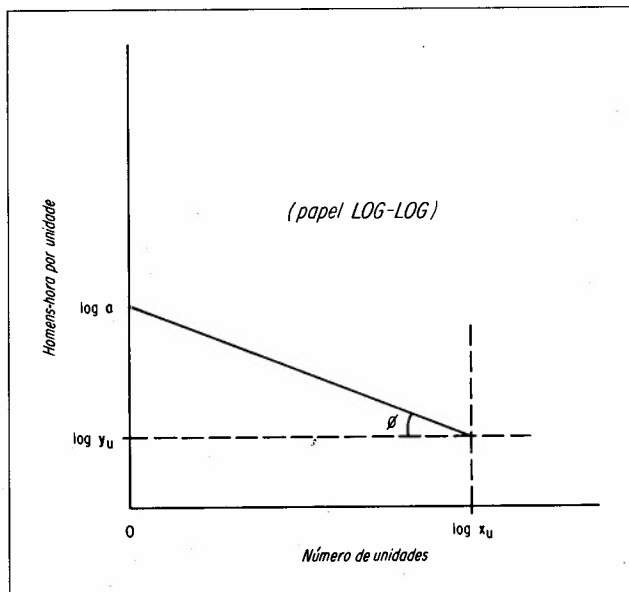
as "inclinações de Wright" seriam fornecidas pela pesquisa de Cornell, para as diversas categorias de operações, conforme já foi visto (tabela 1).

A maneira como os resultados da pesquisa de Schulz e Conway foram aplicados na elaboração de es-

timativas dos custos de implantação de novos produtos ou de modificações de produtos existentes poderá ser conhecida consultando-se a referência (13).

As aplicações existentes e potenciais da função de progresso serão objeto de outro artigo.

Figura 1



1.5 Os estudos mais recentes

A partir de meados da década de 60, nota-se um certo esvaziamento da função de progresso. O número de publicações apresenta-se cada vez mais reduzido. São escassos os autores que se dedicam à matéria, mesmo na indústria aeroespacial. De modo geral, os trabalhos surgidos nesse período pouco acrescentam ao corpo de conhecimentos consolidado nas décadas anteriores. Entretanto, N. Baloff, da Universidade de Stanford e S. W. Becker, da Universidade de Chicago, preocupam-se em unir os esforços dos estudiosos do processo de produção — economistas, engenheiros, etc. — e os dos pesquisadores das ciências do comportamento humano (notadamente psicólogos). A bibliografia no final deste apresenta alguns de seus trabalhos mais importantes (14, 15, 16, 17, 18, 19).

A análise de aspectos do comportamento de aprendizagem e de sua influência sobre a estrutura de organização foi objeto de artigo recente deste autor (20). Não é pois nossa intenção examinar, na presente exposição, as contribuições de pesquisadores das ciências comportamentais.

Tendo em vista o escopo deste, a contribuição de maior interesse de Baloff é aquela em que estuda novos ramos industriais, a saber: instrumentos musicais, automóveis e vestuário, estendendo, pela primeira vez, a aplicação do modelo da função de progresso aos ramos mencionados.

Foram determinados os parâmetros correspondentes e examinada a ocorrência de platôs nas curvas. Os resultados da pesquisa sugerem a maior aplicação do modelo

às indústrias mão-de-obra intensivas; fornecem dados que tornam possível aquilatar um método empírico de previsão dos parâmetros do modelo e demonstram a dificuldade de se generalizar em relação à ocorrência e à previsibilidade dos platôs (17).

1.6 As indústrias pesquisadas

A literatura revela que, até hoje, foram realizados estudos ou pesquisas nos seguintes ramos de atividades industriais (21): a) *aeroespacial*: b) *transporte*: indústria de construção naval, indústria automobilística e de material ferroviário; c) *mecânica e metalúrgica*: produção de aço, usinagem e montagem mecânica, fabricação de máquinas operatrizes; d) *elétrica, eletromecânica e eletrônica*: eletrodomésticos, motores industriais, instrumentos musicais, máquinas de processamento de dados; e) *outras*: calçados, gráfica, manutenção, petróleo e vestuário.

Em pesquisa realizada em 1973, este autor estimou os parâmetros da função de progresso da produção, para diversas indústrias brasileiras. Assim é que, além das indústrias aeronáuticas, naval, de máquinas de processamento de dados e de material ferroviário, foram pesquisados alguns ramos ainda não mencionados na literatura. Tais são os casos das indústrias de: equipamentos de extração e produção de petróleo e de máquinas rodoviárias (21).

2. ASPECTOS TEÓRICOS DA FUNÇÃO DE PROGRESSO DA PRODUÇÃO

Até hoje, na solução de problemas empresariais de planejamento da produção e previsão de custos, foram utilizadas pelo menos quatro funções de progresso, de formas semelhantes e significados distintos:

- I) $y = ax \cdot b$ (função média acumulada)
- II) $y = ax^{-b}$ (função unitária)
- III) $y_t = ax^B$ (função total acumulada)
- IV) $y_L = ax^{-b}$ (função média de lote)

Os significados de \bar{y} e y nos modelos I) e II) já foram esclarecidos anteriormente. Quanto ao modelo III), y_t representa a mão-de-obra *total* acumulada desde a primeira unidade produzida até a unidade considerada, x . Quanto ao modelo IV), \bar{y}_L representa a mão-de-obra *média* de lote, isto é, a mão-de-obra total despendida na produção do lote dividida pelo número de unidades do mesmo e x representa a produção acumulada até a última unidade do lote considerado.

A questão crucial foi sempre o ajustamento dessas *formas* funcionais à realidade empírica. Vale ressaltar que se estudaram muitas outras funções, sendo porém menos universais.

O surgimento e o uso continuado das formas mencionadas devem-se, principalmente, às seguintes circunstâncias: a) ajustamento adequado aos dados imediatamente disponíveis, sem que houvesse necessidade de processamento intermediário para que pudessem ser utilizados no modelo; b) simplicidade de utilização do modelo, especialmente quando sob a forma de gráfico logarítmico.

Sob o ponto de vista matemático, as formas acima acham-se estreitamente relacionadas, conforme será examinado a seguir.

2.1 Problemas fundamentais

Os usuários da função de progresso da produção de-
frontaram-se, quase sempre, com *quatro* problemas
básicos, a saber:

Problema I. Dada a função $\bar{y} = \bar{y}(x)$, estabelecer:

$$y_t = y_t(x), y = y(x) \text{ e } \bar{y}_L = \bar{y}_L(x)$$

Problema II. Dada a função $y = y(x)$, estabelecer:

$$y_t = y_t(x), \bar{y} = \bar{y}(x) \text{ e } \bar{y}_L = \bar{y}_L(x)$$

Problema III. Dada a função $y_t = y_t(x)$, estabelecer:

$$\bar{y} = \bar{y}(x), y = y(x) \text{ e } \bar{y}_L = \bar{y}_L(x)$$

Problema IV. Dada a função $\bar{y}_L = \bar{y}_L(x)$, estabelecer:

$$y_t = y_t(x), \bar{y} = \bar{y}(x) \text{ e } y = y(x).$$

A expressão "dada a função..." significa que o pes-
quisador conseguiu ajustar de maneira razoável aquela
função aos dados empíricos disponíveis. Tal será o ponto
de partida. Daí por diante a análise matemática se en-
carregará de fornecer as demais funções procuradas.
Seguem-se as soluções analíticas dos problemas colo-
cados.

Problema I. Solução

a) Por definição, $y_t(x) = \bar{y}(x) \cdot x$; se a função discreta $\bar{y} =$
 $= \bar{y}(x)$ foi aproximada por $\bar{y} = ax^{-b}$, segue-se que:

$$y_t = ax^{1-b}, (x = 1, 2, \dots), \quad (5)$$

b) A função unitária $y = y(x)$ poderá ser estabelecida
conforme segue:

$y(x) = y_t(x) - y_t(x-1)$; tendo em vista (5) vem:

$$y(x) = ax^{1-b} - a(x-1)^{1-b} \text{ ou} \\ y(x) = a[x^{1-b} - (x-1)^{1-b}], (x = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

c) A função média de lote pode ser estabelecida com
facilidade, recorrendo-se à seguinte notação: seja x_i a
produção acumulada desde a primeira unidade fa-
bricada até a última unidade do i -ésimo lote. De acor-
do com (5), a mão-de-obra referente ao lote i , isola-
damente, será dada por:

$$y_{ti} = a(x_i^{1-b} - x_{i-1}^{1-b}), (i = 1, 2, \dots), x_0 = 0$$

A mão-de-obra média do lote i será:

$$\bar{y}_{Li} = \frac{a(x_i^{1-b} - x_{i-1}^{1-b})}{x_i - x_{i-1}} \quad (7)$$

Conhecido o número de unidades em cada lote, será
possível, através de (7), estabelecer a função discreta
 $\bar{y}_L = \bar{y}_L(x)$, ($x = x_1, x_2, \dots, x_1, \dots$).

Nota: Em geral, as funções dos problemas propostos
são discretas, salvo no caso em que a função de progres-
so possa ser expressa, por exemplo, em unidades de

mão-de-obra por unidade de peso. Como sempre,
procura-se aproximá-las por funções contínuas, para
que se possa utilizar os recursos da análise matemática.

Tomemos a fórmula (6) da função unitária: $y(x) = a$
 $[x^{1-b} - (x-1)^{1-b}]$; na falta de uma calculadora ele-
trônica, o seu emprego exigiria a utilização de mantissas
de logaritmos com um número de casas decimais cada
vez maior, na medida em que x e $(x-1)$ cresceram.
Berghell (1) sugere uma solução prática mediante o uso
da fórmula aproximada:

$$y(x) = \frac{a(1-b)}{(x-0,5)^b}$$

suficientemente precisa para $x > 10$.

Contudo, a expressão da função unitária também
poderia ser aproximada conforme segue, para valores de
 x não muito próximos das primeiras unidades:

$$\bar{y}(x) \cong \frac{1}{x} \int_0^x y(x) dx;$$

como $\bar{y}(x) = ax^{-b}$, vem, sucessivamente:

$$\int_0^x y(x) dx \cong ax^{1-b} \text{ ou derivando em relação a } x:$$

$$y(x) \cong a(1-b)x^{-b} \quad (8)$$

A utilização da fórmula (8) é grandemente facilitada
pois, conhecida a função $\bar{y} = \bar{y}(x)$, os valores médios já
estarão disponíveis, bastando multiplicá-los pela cons-
tante $(1-b)$ para se obter os valores unitários.

Deve-se ressaltar que a função:

$$f(\log x) = \log a + \log(1-b) - b \log x$$

é assíntota de

$$F(\log x) = \log \{a [x^{1-b} - (x-1)^{1-b}]\}$$

A literatura utiliza este resultado sem demonstrá-lo.
Em (21) este autor propõe uma prova formal.

27

Exemplo I. Dado $\bar{y} = 1\,000 x^{-0,500}$, estabelecer y_t e y .

Solução. Tem-se, portanto: $a = 1\,000$ homens-hora para
a primeira unidade e $b = 0,500$. Daí:

$$y_t = ax^{1-b} = 1\,000 x^{0,500} \text{ e} \\ y = a [x^{1-b} - (x-1)^{1-b}] = 1\,000 [x^{0,500} - (x-1)^{0,500}]$$

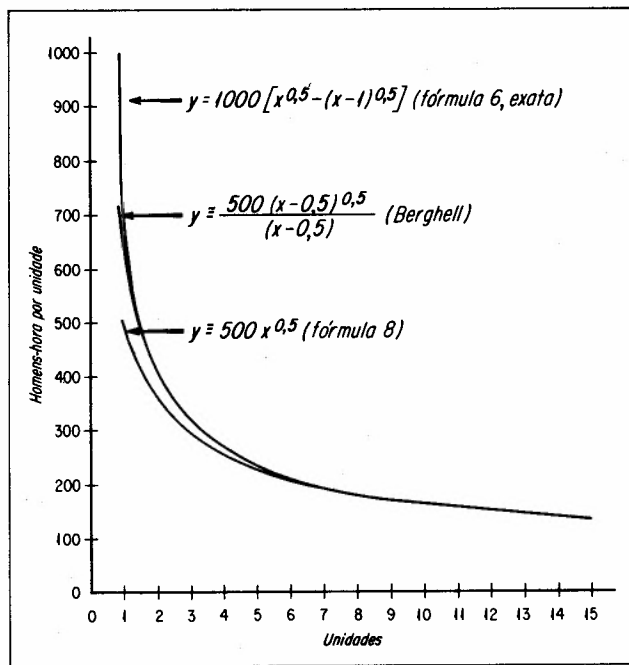
A fórmula de Berghell daria:

$$y = \frac{a(1-b)}{(x-0,5)^b} = \frac{1\,000(1-0,500)}{(x-0,5)^{0,500}} = \\ = \frac{500(x-0,5)^{1/2}}{x-0,5}$$

A fórmula (8) forneceria a seguinte aproximação:

$$y \cong a(1-b)x^{-b} = 1\,000(0,500)x^{-0,500} = 500x^{-0,500} = \bar{y}/2$$

Figura 2 - Função de progresso unitária (exata e aproximada) correspondente ao exemplo I.



Na figura 2 aparecem: a curva correspondente à função unitária $y = 1\,000 [x^{0,500} - (x - 1)^{0,500}]$ e às duas aproximações sugeridas.

No caso em que fosse conhecido o número de unidades em cada lote, poderíamos estabelecer também \bar{y}_L . Suponhamos dados, à guisa de exemplos:

lote i	número de unidades	x_i	x_{i-1}
1.º	50	50	0
2.º	50	100	50
3.º	40	140	100

Calculando, segundo a fórmula (7), vem:

$$\bar{y}_{L1} = \frac{1\,000(50^{0,500})}{50} = 141,4$$

(h-hora p/unidade)

$$\bar{y}_{L2} = \frac{1\,000(100^{0,500} - 50^{0,500})}{50} = 58,6$$

(h-hora p/unidade)

$$\bar{y}_{L3} = \frac{1\,000(140^{0,500} - 100^{0,500})}{40} = 45,8$$

(h-hora p/unidade)

Problema II. Solução

a) Conhece-se a função unitária: $y = y(x)$, ($x = 1, 2, \dots$)
A mão-de-obra total até e inclusive a unidade x será:

$$y_t(x) = \sum_x y(x)$$

Se a função unitária for: $y(x) = ax^{-b}$, então:

$$y_t(x) = \sum_x ax^{-b} = a \sum_x x^{-b}, \quad (x = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

b) A função média acumulada será dada por:

$$\bar{y}(x) = \frac{y_t(x)}{x} = \frac{\sum_x y(x)}{x}$$

No caso em que a função unitária seja da forma $y(x) = ax^{-b}$, a função média acumulada será:

$$\bar{y}(x) = \frac{a}{x} \sum_x x^{-b}, \quad (x = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

c) Para se estabelecer a função média de lote a partir do conhecimento da função unitária, adota-se a mesma notação anterior do problema I. Seja pois:

x_i - a produção acumulada desde a primeira unidade fabricada até a última unidade do lote i .

Tendo em vista (9), vem:

$$y_t(x_i) = a \sum_1^{x_i} x^{-b}$$

$$y_t(x_{i-1}) = a \sum_1^{x_{i-1}} x^{-b}$$

Subtraindo membro a membro, ter-se-á a mão-de-obra total para o lote i , isoladamente:

$$y_{ti} = a \left[\sum_1^{x_i} x^{-b} - \sum_1^{x_{i-1}} x^{-b} \right] \text{ ou}$$

$$y_{ti} = a \sum_{j=1}^{x_i - x_{i-1}} (x_{i-1} + j)^{-b}$$

A mão-de-obra média do lote i será:

$$\bar{y}_{Li} = \frac{a}{x_i - x_{i-1}} \sum_{j=1}^{x_i - x_{i-1}} (x_{i-1} + j)^{-b} \quad (11)$$

Conhecido o número de unidades em cada lote, será possível determinar a função discreta

$$\bar{y}_L = \bar{y}(x), \quad (x = x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$$

Nota: As fórmulas que envolvem somatórios podem ser aproximadas por integrais. Tomemos, por exemplo, a fórmula (9). Tem-se:

$$y_t(x) \cong a \int_0^x x^{-b} = a \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^x x^{-b} = \frac{a}{1-b} x^{1-b} \quad (12)$$

A função média acumulada pode ser aproximada por:

$$\bar{y}(x) \cong \frac{a}{1-b} x^{-b} \quad (13)$$

Exemplo II. Dado $y = 100 x^{-0,215}$, estabelecer y_t e \bar{y} .

Solução. Tem-se, de acordo com (9), (10), (12) e (13):

$$y_t(x) = a \sum_x x^{-b} = 100 \sum_x x^{-0,215} \cong \frac{100}{0,785} x^{0,785}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{a}{x} \sum_x x^{-b} = \frac{100}{x} \sum_x x^{-0,215} \cong \frac{100}{0,785} x^{-0,215}$$

Suponhamos que o número de unidades em cada lote fosse conhecido. Tomemos os dados do exemplo I. A mão-de-obra média de lote será, de acordo com (11):

$$\bar{y}_{L1} = \frac{100}{50} \sum_{j=1}^{50} (0+j)^{-0,215} \cong \frac{2}{0,785} 50^{0,785} = 55,1$$

$$\bar{y}_{L2} = \frac{100}{50} \sum_{j=1}^{50} (50+j)^{-0,215} \cong$$

$$\cong \frac{2}{0,785} (100^{0,785} - 50^{0,785}) = 39,7$$

$$\bar{y}_{L3} = \frac{100}{40} \sum_{j=1}^{40} (100+j)^{-0,215} \cong$$

$$\cong \frac{2,5}{0,785} (140^{0,785} - 100^{0,785}) = 36,0$$

As aproximações foram obtidas de modo análogo aos casos anteriores. O leitor, como exercício, poderá mostrar, em detalhe, como foram feitas as aproximações sugeridas, a partir da fórmula exata (11).

Problema III. Solução.

Este problema é trivial, uma vez apresentada a solução do problema I.

a) A função média acumulada será dada por:

$$\bar{y}(x) = \frac{y_t(x)}{x}$$

No caso em que a função total acumulada seja da forma $y_t = ax^B$, $B > 0$, ter-se-á:

$$\bar{y}(x) = ax^{B-1} \quad (x = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

b) A função unitária poderá ser obtida como no problema I:

$$y(x) = y_t(x) - y_t(x-1)$$

Se a forma de $y_t(x)$ for: $y_t = ax^B$, vem:

$$y(x) = a [x^B - (x-1)^B], \quad (x = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

c) A função média de lote será determinada segundo a metodologia exposta no problema I. O resultado será:

$$y_{L1} = \frac{a(x_i^B - x_{i-1}^B)}{x_i - x_{i-1}} \quad (16)$$

Problema IV. Solução

Adotando-se a notação do problema I:

a) A mão-de-obra total correspondente ao lote i , isoladamente, será:

$$y_{ti} = \bar{y}_{Li} (x_i - x_{i-1})$$

Se $\bar{y}_{Li} = ax_i^{-b}$, a mão-de-obra total acumulada até a última unidade do lote i será:

$$y_t(x_i) = a \sum_i x_i^{-b} (x_i - x_{i-1}) \quad (17)$$

b) A mão-de-obra média acumulada até x_i será:

$$\bar{y}(x_i) = \frac{y_t(x_i)}{x_i}; \text{ se } \bar{y}_{Li} = ax_i^{-b}, \text{ vem:}$$

$$\bar{y}(x_i) = \frac{a}{x_i} \sum_i x_i^{-b} (x_i - x_{i-1}) \quad (18)$$

c) A mão-de-obra unitária não pode ser deduzida com exatidão. Recorre-se a uma aproximação, supondo-se que a mão-de-obra média do lote i , calculada sobre as $(x_i - x_{i-1})$ unidades desse lote, possa ser utilizada para se calcular a mão-de-obra total correspondente às primeiras $(x_i - 1 - x_{i-1})$ unidades do lote i , ou seja, a mão-de-obra total do lote i menos a mão-de-obra da unidade x_i . Simbolicamente:

$$\bar{y}_{Li} = \frac{y_{ti}}{x_i - x_{i-1}} \cong \frac{y_{ti} - y(x_i)}{x_i - 1 - x_{i-1}}$$

Tal aproximação implicará:

$$y(x_i) \cong \bar{y}_{Li}; \text{ se } \bar{y}_{Li} = ax_i^{-b}, \text{ então}$$

$$y(x_i) \cong ax_i^{-b} \quad (19)$$

Nota: O problema IV, bem assim como as letras c dos problemas I, II e III não são tratados formalmente

na literatura. Os autores confundem este modelo com o da função unitária, supondo, implicitamente, que a mão-de-obra média do lote i seja igual à mão-de-obra despendida na última unidade do lote i , (x_i) .

Exemplo III. Dado $\bar{y}_{Li} = 1\ 000 x_i^{-0,322}$, estabelecer $y_t = y_t(x)$,

$$\bar{y} = \bar{y}(x) \text{ e } y = y(x).$$

Solução. De acordo com (17), (18) e (19) vem:

$$a) y_t(x_i) = a \sum_i x_i^{-b} = 1\ 000 \sum_i x_i^{-0,322}$$

$$b) \bar{y}(x_i) = \frac{a}{x_i} \sum_i x_i^{-b} (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \frac{1\ 000}{x_i} \sum_i x_i^{-0,322} (x_i - x_{i-1})$$

$$c) y(x_i) \cong ax_i^b = 1\ 000 x_i^{-0,322}$$

Conhecido o número de unidades em cada lote, seria possível calcular $y_t(x_i)$, $\bar{y}(x_i)$ e $y(x_i)$ para cada valor de x_i , utilizando-se diretamente as expressões obtidas ou, conforme o caso, a metodologia de aproximação já exemplificada anteriormente.

2.2 Cálculo da função de progresso

Conhecida a forma do modelo, os problemas típicos de cálculo da função de progresso da produção podem ser classificados segundo dois tipos básicos:

A) Dados um ponto e a inclinação da reta de progresso, estabelecer a função de progresso e calculá-la para determinar valor de x .

B) Dados dois pontos, estabelecer a função de progresso e calculá-la para determinado valor de x .

Cada tipo básico dá origem a três problemas. Para fins de ilustração supomos que a forma $\bar{y} = ax^{-b}$ possa ser ajustada com razoável precisão aos dados empíricos. Os enunciados e as soluções desses problemas típicos vêm a seguir.

Problema A1. Dados a e b , estabelecer a função $\bar{y} = \bar{y}(x)$. Este problema é trivial.

Solução. Tem-se, evidentemente:

$$\bar{y} = ax^{-b}$$

Os valores de $\bar{y}(x)$ podem ser calculados através de:

$$\log \bar{y} = \log a - b \log x.$$

Exemplo IV. Dados $a = 60\ 000$ (h-hora) para a primeira unidade fabricada e $b = 0,215$, calcular: a) a mão-de-obra média para as 130 primeiras unidades; b) a mão-de-obra total acumulada para esta produção e c) a mão-de-obra a ser despendida na fabricação da 130.^a unidade.

Solução.

$$a) \bar{y}(130) = 60\ 000 \times 130^{-0,215}$$

$$\log \bar{y} = \log 60\ 000 - 0,215 \log 130 = 4,3237$$

$$\text{Donde, } \bar{y}(130) = 21\ 100 \text{ (h-hora por unidade)}$$

$$b) y_t = \bar{y} \cdot x = 21\ 100 \times 130 = 2\ 740\ 000 \text{ (h-hora)}$$

c) Aplicando a fórmula de Berghell, vem, para a 130.^a unidade:

$$y(130) \cong \frac{60\ 000(1 - 0,215)}{(130 - 0,5)^{0,215}} = 16\ 600 \text{ (h-hora)}$$

A fórmula (8) também poderia ser aplicada:

$$y(130) \cong \bar{y}(130) \times (1 - b) = 21\ 100 \times 0,785 = 16\ 600 \text{ (h-hora)}$$

O leitor deve notar que a mão-de-obra despendida na fabricação da 130.^a unidade é pouco mais que a quarta parte da mão-de-obra despendida na primeira unidade.

Problema A2. Dados $\bar{y}(x_i)$ e b , estabelecer $\bar{y} = \bar{y}(x)$.

Solução. Tem-se, de acordo com o próprio modelo:

$$\bar{y}(x_i) = ax_i^{-b},$$

$$\text{donde: } a = \bar{y}(x_i) \cdot x_i^b$$

Conhecidos a e b , temos novamente o problema A1.

Exemplo V. Dados $b = 0,322$ e a mão-de-obra média para as 1 000 primeiras unidades, $\bar{y}(1\ 000) = 20\ 000$ (h-hora por unidade): a) estabelecer a função de progresso, $\bar{y} = \bar{y}(x)$; b) calcular a mão-de-obra total para as 10 primeiras unidades e c) a mão-de-obra para a terceira unidade.

Solução.

$$a) \bar{y}(1\ 000) = a \cdot 1\ 000^{-0,322} = 20\ 000,$$

donde, $a = 20\ 000 \times 1\ 000^{0,322} = 185\ 000$ (h-hora para a primeira unidade).

A função de progresso será pois:

$$\bar{y} = 185\ 000 x^{-0,322}$$

b) De acordo com a fórmula (5), vem:

$$y_t(10) = 185\ 000 \times 10^{0,678} = 880\ 600 \text{ (h-hora)}$$

c) De acordo com a fórmula (6), vem, para a terceira unidade:

$$y(3) = 185\ 000 (3^{0,678} - 2^{0,678}) = 93\ 600 \text{ (h-hora)}.$$

Problema A3. Dados o parâmetro b e a mão-de-obra total para as x_i primeiras unidades, estabelecer $\bar{y} = \bar{y}(x)$.

Solução. De acordo com a fórmula (5),

$$y_t(x_i) = ax_i^{1-b}$$

$$\text{Donde, } a = \frac{y_t(x_i)}{x_i^{1-b}}$$

Conhecidos a e b , retornamos ao problema A1.

Exemplo VI. Dados $b = 0,400$ e a mão-de-obra total despendida na fabricação das 500 primeiras unidades, $y_t(500) = 7\,000\,000$ (h-hora), estabelecer $\bar{y} = \bar{y}(x)$.

Solução. Tem-se, para a 1.^a unidade:

$$a = \frac{y_t(x_i)}{x_i^{1-b}} = \frac{7\,000\,000}{500^{0,600}} = 168\,000 \text{ (h-hora)}$$

Donde, $\bar{y} = 168\,000 x^{-0,400}$

Problema A4. Dados o parâmetro b e a mão-de-obra para a unidade x_i , estabelecer $\bar{y} = \bar{y}(x)$.

Solução. De acordo com a fórmula (6):

$$y(x_i) = a [x_i^{1-b} - (x_i - 1)^{1-b}]$$

$$\text{Donde, } a = \frac{y(x_i)}{x_i^{1-b} - (x_i - 1)^{1-b}}$$

Conhecidos a e b , retornamos ao problema A1.

Problema B1. Dadas a mão-de-obra média para as x_i primeiras unidades e a mão-de-obra média para as x_j primeiras unidades, estabelecer $\bar{y} = \bar{y}(x)$.

Solução. Tem-se, de acordo com a expressão do modelo:

$$\bar{y}(x_i) = ax_i^{-b} \text{ e } \bar{y}(x_j) = ax_j^{-b}$$

Dividindo membro a membro, vem:

$\bar{y}(x_i) / \bar{y}(x_j) = (x_j / x_i)^b$; aplicando logaritmos e tirando o valor de b :

$$b = \frac{\log [\bar{y}(x_i) / \bar{y}(x_j)]}{\log (x_j / x_i)}$$

O valor de a pode ser calculado, por exemplo, através de:

$$a = \bar{y}(x_i) \cdot x_i^b$$

Conhecidos a e b , voltamos ao problema A1.

Nota: O leitor deverá apresentar a solução para o caso em que sejam dadas a mão-de-obra para a primeira unidade e a mão-de-obra média para as x_j primeiras unidades. Neste caso, tem-se: $y(x_i) = a, x_i = 1$.

Exemplo VII. A mão-de-obra média para as 100 primeiras unidades fabricadas de determinado produto é $\bar{y}(100) = 2\,100$ (h-hora por unidade); a mão-de-obra média para as 25 primeiras unidades é $\bar{y}(25) = 4\,200$ (h-hora por unidade). Escrever as equações de: a) \bar{y} , b) y_t e c) y .

Solução.

$$a) b = \frac{\log (4\,200 / 2\,100)}{\log (100/25)} = 0,5$$

$$\bar{y}(100) = a \times 100^{-0,5} = 2\,100 \text{ (h-hora por unidade)}$$

Donde, $a = 2\,100 \times 100^{0,5} = 21\,000$ (h-hora para a primeira unidade).

$$b) y_t = 21\,000 x^{0,5}$$

$$c) y \cong \frac{21\,000 (1 - 0,5)}{(x - 0,5)^{0,5}} = \frac{10\,500 (x - 0,5)^{0,5}}{x - 0,5}$$

de acordo com a fórmula aproximada de Berghell.

Problema B2. Dadas a mão-de-obra total para as x_i primeiras unidades fabricadas e a mão-de-obra total para as x_j primeiras unidades, estabelecer $\bar{y} = \bar{y}(x)$.

Solução. Tem-se, de acordo com a fórmula (5):

$$y_t(x_i) = a x_i^{1-b} \text{ e } y_t(x_j) = a x_j^{1-b}$$

Dividindo membro a membro, aplicando logaritmos e resolvendo para b vem:

$$b = 1 - \frac{\log [y_t(x_i) / y_t(x_j)]}{\log (x_i / x_j)}$$

O valor de a poderá ser calculado, por exemplo, a partir de:

$$a = \frac{y_t(x_i)}{x_i^{1-b}}$$

Conhecidos a e b , retornamos ao problema A1.

Nota: O leitor deverá apresentar a solução para o caso em que sejam dadas a mão-de-obra para a primeira unidade e a mão-de-obra total para as x_j primeiras unidades.

Exemplo VIII. Em determinada manufatura, a mão-de-obra total de fabricação das 20 primeiras unidades é igual a 200 000 (h-hora) e a mão-de-obra total para as 40 primeiras unidades é igual a 350 000 (h-hora). Pede-se: a) estabelecer a função de progresso média acumulada,

$\bar{y} = \bar{y}(x)$; b) calcular a mão-de-obra total de fabricação do lote limitado pelas 51.^a a 100.^a unidades, e c) calcular a mão-de-obra média para esse lote.

2.3 Solução

$$a) \quad b = 1 - \frac{\log(200\,000/350\,000)}{\log(20/40)} = 0,196$$

$$y_t(20) = 200\,000 = a \cdot 20^{1-0,196}$$

$$\text{Donde, } a = \frac{200\,000}{20^{0,804}} = 18\,000$$

(h-hora para a primeira unidade)

$$\text{Portanto, } \bar{y} = 18\,000 x^{-0,196}$$

b) Tem-se, de acordo com a fórmula (5):

$$y_t(50) = 18\,000 \times 50^{0,804}$$

$$y_t(100) = 18\,000 \times 100^{0,804}$$

$$y_t(51 \text{ até } 100) = y_t(100) - y_t(50) = 18\,000(100^{0,804} - 50^{0,804})$$

ou

$$y_t(51 \text{ até } 100) = 313\,000 \text{ (h-hora)}$$

c) A mão-de-obra média para esse lote será:

$$\bar{y}_L = \frac{313\,000}{50} = 6\,260 \text{ (h-hora por unidade)}$$

Problema B3. Dadas a mão-de-obra para as unidades x_i e x_j , estabelecer $\bar{y} = \bar{y}(x)$.

Solução. De acordo com a fórmula de Berghell:

$$y(x_i) \cong \frac{a(1-b)}{(x_i - 0,5)^b}$$

$$y(x_j) \cong \frac{a(1-b)}{(x_j - 0,5)^b}$$

Dividindo membro a membro, aplicando logaritmos e resolvendo para b , vem:

$$b = \frac{\log [y(x_i) / y(x_j)]}{\log [(x_j - 0,5) / (x_i - 0,5)]}$$

O valor de a pode ser calculado a partir de:

$$a = \frac{y(x_i)(x_i - 0,5)^b}{1-b}$$

Calculando-se a e b , a equação de $\bar{y} = \bar{y}(x)$ é facilmente estabelecida, conforme já foi visto em A1.

Nota: 1. O leitor deverá determinar a solução para o caso em que sejam dadas a mão-de-obra para a primeira unidade e a mão-de-obra para a unidade x_j .

2. O problema B3 também pode ser resolvido com auxílio da fórmula (8). É fácil mostrar que os parâmetros b e a seriam dados por:

$$b = \frac{\log y(x_i) / y(x_j)}{\log (x_j / x_i)}$$

$$a = \frac{y(x_i) \cdot x_i^b}{1-b}$$

3. CONCLUSÃO E SUMÁRIO

Neste artigo foram abordados o desenvolvimento histórico da função de progresso da produção e aspectos teóricos da referida função.

Inicialmente, diversas pesquisas empíricas demonstraram a conveniência das formas $\bar{y} = ax^{-b}$ ou $y = ax^{-b}$. Assim é que se confirmaram as seguintes propriedades:

1. Linearidade entre $\log \bar{y}$ (ou $\log y$) e $\log x$.
2. $\log \bar{y}$ (ou $\log y$) é decrescente com $\log x$.

Pesquisas subseqüentes mostraram que:

3. Diferentes tipos de operações possuem ritmos de progressos distintos.
4. Quanto maior o grau de complexidade de um produto relativamente ao produto-base de comparação, maior o ritmo de progresso a ser experimentado por esse produto.
5. Quanto menor o grau de semelhança de um produto relativamente a produtos anteriormente fabricados, maior será o ritmo de progresso.
6. Produtos fabricados por departamentos especializados experimentam maiores ritmos de progresso do que aqueles fabricados por departamentos que também se dediquem a outros produtos.

A literatura existente sugere quatro tipos de função de progresso: a) a função média acumulada; b) a função total acumulada; c) a função unitária; e d) a função média de lote. Neste artigo procurou-se apresentar a solução formal do problema de passagem de uma das formas às outras três, o que não é feito de modo claro na literatura, particularmente em relação à forma d.

Finalmente foram tratados diversos problemas de cálculo da função de progresso em situações típicas. ■

BIBLIOGRAFIA

1. Berghell, A. B. *Production engineering in the aircraft industry*. New York. McGraw-Hill Book Company, N. York, 1944. cap. XII, p. 166-94.
2. Hughes, R. C. & Golem, H. G. *Production efficiency curves*. San Diego, California, Arts and Crafts Press, 1944.
3. Wright, T. P. Factors affecting the cost of airplanes. *Journal of the Aeronautical Sciences*, Inst. of the Aer. Sci., v. 3, n. 4, p. 122-8, Feb. 1936.
4. Stanford Research Institute. *Development of production acceleration curves for airframes*. 1949.
5. Alchian, A. *An airframe production function*. Santa Monica, California, The Rand Corp. 10 Oct. 1949. p. 108.
6. —. *Reliability of progress curves in airframe production*. Project Rand, RM-260-1. Santa Monica, California, The Rand Corp. 3 Feb. 1950.
7. Arrow, K. J. & Arrow, S. S. *Methodological problems in airframe cost-performance studies*. RM-456. Santa Monica, California, The Rand Corp., 20 Sep. 1950.
8. —. & Bradley, H. *Cost-quality relations in bomber airframes*. RM-536, Santa Monica, California, The Rand Corp., 6 Feb. 1951.
9. Asher, H. *Cost-quantity relationships in the airframe industry*. R-291, Santa Monica, California, The Rand Corp., July 1956.
10. Hirsch, M. Z. Manufacturing progress functions. *The Review of Economics and Statistics*, v. 34, n. 2, May 1952.
11. —. Firm progress ratios. *Econometrica*, v. 24, n. 2, Apr. 1956.
12. Conway, R. W. & Schulz, Jr. A. The manufacturing progress function. *The Journal of Industrial Engineering*. v. 10, Jan./Feb. 1959.
13. Schreiner, D. A. The manufacturing progress function, its application to operations at IBM-Endicott. Trabalho apresentado na XII Convenção Anual da ASQC, Boston, Mass., maio de 1958.
14. Baloff, N. Startups in machine-intensive production systems. *The Journal of Industrial Engineering*, v. 17, 1966.
15. —. The learning curve — Some controversial issues: *The Journal of Industrial Economics*, July 1966
16. —. Estimating de parameters of the startup model — an empirical approach. *The Journal of Industrial Engineering*, Apr. 1967.
17. —. Extension of the learning curve — some empirical results. *Operational Research Quarterly*, v. 22, n. 4, 1971.
18. Ballof, N. & Becker S., A model of group adaptation to problem solving tasks. *Organizational Behavior and Human Performance*, Aug. 1968.
19. —. Organization structure and problem-solving behavior. *Administrative Science Quarterly*, v. 14, 1969.
20. Reis, D. R. A. dos. Estrutura de organização e comportamento de aprendizagem, *Revista de Administração de Empresas*. Rio, FGV, abr. 1975.
21. —. Extensão da função de progresso da produção de algumas indústrias brasileiras. Dissertação de mestrado em administração de empresas, EAESP-FGV, out 1973. (Apêndice D (Bibliografia).